

13/3/17

► $f: V \rightarrow V$ διαγωνιστική αν-ν υπάρχει βάση $\alpha = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ του V τέτοια ώστε $[f]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ αν-ν
 υπάρχει βάση $\beta = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ που αποτελείται από ιδιοδιάνυσμα.

$f(\vec{a}) = \lambda \vec{a}$ λ ιδιοτιμή
 $\vec{a} \neq 0$ $\vec{a}$ ιδιοδιάνυσμα

Παράδειγμα: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $f(x,y) = (x+y, y)$. Είναι η f διαγωνιστική; Οχι!

Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ ιδιοτιμή της f υπάρχει $(x,y) \neq (0,0)$ τέτοιο ώστε
 $f(x,y) = \lambda(x,y) \Rightarrow (x+y, y) = (\lambda x, \lambda y)$
 $\left. \begin{matrix} x+y = \lambda x \\ y = \lambda y \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} (1-\lambda)x + y = 0 \\ (1-\lambda)y = 0 \end{matrix}$ οι γενικές λύσεις στο σύστημα
 είναι με 2-αγνώστους που
 έχω ταυτόχρονα μια κυκλική
 νύξη λύση.

Αρα δεν είναι σύστημα Cramer
 $\Rightarrow \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ (διπλή λύση)

Ιδιοδιάνυσμα $\lambda=1$ $\begin{matrix} 0x+y=0 \\ 0x+0y=0 \end{matrix}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ $\begin{matrix} y=0 \\ x=t \end{matrix}$

Αρα όλα τα ιδιοδιάνυσμα είναι της μορφής $(t, 0) \ t \in \mathbb{R}^*$

Η f είναι διαμερίσιμη αν και μόνο αν μπορούμε να βρούμε βάσις που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα

Στην περίπτωση μας ψάχνουμε για δύο ιδιοδιανύσματα που είναι ως μορφής $(t, 0)^T$ και είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Οποιοδήποτε δύο διανύσματα ως μορφής $(t, 0)^T$ είναι γραμμικά εξαρτημένα $(t_2(t_1, 0) - t_1(t_2, 0) = (0, 0))$

Άρα δεν μπορούμε να βρούμε βάσις του $\mathbb{C}^2$ που να αποτελείται από ιδιοδιανύσματα συνεπώς f δεν είναι διαμερίσιμη

Πρόταση: Έστω V ένας K -διανυσματικός χώρος και $f: V \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση. Το λ είναι ιδιοτιμή ως f αν και μόνο αν $\text{Ker}(f - \lambda I_V) \neq \{\vec{0}\}$

$$f: V \rightarrow V$$

$$I_V: V \rightarrow V$$

$$[f+g]_a^b = [f]_a^b + [g]_a^b$$

$$[\lambda f]_a^b = \lambda [f]_a^b$$

$$V \xrightarrow{f} W$$

$$V \xrightarrow{g} W$$

$$V \xrightarrow{f+g} W$$

$$(f+g)(\vec{a}) = f(\vec{a}) + g(\vec{a})$$

$$(\lambda f)(\vec{a}) = \lambda f(\vec{a})$$

$$f: V \rightarrow V$$

$$I_V: V \rightarrow V$$

$$(-\lambda I_V): V \rightarrow V$$

$f - \lambda I_V$ γραμμική απεικόνιση

$$[f - \lambda I_V]_a^a = [f]_a^a + [-\lambda I_V]_a^a = [f]_a^a - \lambda [I_V]_a^a$$

$$[I_n]_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $a_1 \quad a_2$

λ ιδιοτιμή της $f \Leftrightarrow$ υπάρχει $\vec{a} \neq \vec{0}$ τέτοιο ώστε $f(\vec{a}) = \lambda \vec{a}$
 $\Leftrightarrow$ υπάρχει $\vec{a} \neq \vec{0}$ τέτοιο ώστε $f(\vec{a}) - \lambda \vec{a} = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow$ υπάρχει $\vec{a} \neq \vec{0}$ τέτοιο ώστε $(f - \lambda I_n)(\vec{a}) = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow$ υπάρχει $\vec{a} \neq \vec{0}$ τέτοιο ώστε $\vec{a} \in \text{Ker}(f - \lambda I_n)$
 $\Leftrightarrow \text{Ker}(f - \lambda I_n) \neq \{\vec{0}\}$

Ορισμός: Ο υπόχωρος $\text{Ker}(f - \lambda I_n)$ ονομάζεται ιδιοχώρος της f που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ και ορίζεται με $V_f(\lambda)$ ή $V(\lambda)$.

$V_f(\lambda) = \{\vec{0}\}$ το ελάχιστο όλων των ιδιοδιαστάσεων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ .

Παρατήρηση: Αν $\vec{a}, \vec{b}$ ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ και $\mu \in K$, τότε το $\vec{a} + \vec{b}$, $\mu \vec{a}$ είναι ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ . (ή είναι μηδέν)

$$f(\vec{a}) = \lambda \vec{a} \quad f(\vec{a} + \vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b})$$

$$f(\vec{b}) = \lambda \vec{b}$$

$$f(\mu \vec{a}) = \mu f(\vec{a}) = \mu \lambda \vec{a} = \lambda (\mu \vec{a}) \quad \text{Άρα αν το } \mu \vec{a} \neq \vec{0} \text{ είναι ιδιοδιάνυσμα}$$

Θεώρημα: Έστω V ένας K -διαν. χώρος $\alpha = \{\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n\}$ μια διατεταγμένη βάση του V $f: V \rightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση $A = [f]_{\alpha}^{\alpha}$ και $\lambda \in K$. Το λ είναι ιδιοτιμή της f αν και μόνο αν $\det(A - \lambda I) = 0$.

λ ιδιοτιμή της $f \Leftrightarrow \text{Ker}(f - \lambda I_V) \neq \{\vec{0}\}$

$\Leftrightarrow$ Η απεικόνιση $f - \lambda I_V$ δεν είναι ισομορφισμός

$\Leftrightarrow$ Η απεικόνιση $f - \lambda I_V$ δεν είναι αντιστρέψιμη

$\Leftrightarrow$ Ο πίνακας $[f - \lambda I_V]_{\alpha}^{\alpha}$ δεν είναι αντιστρέψιμος

$\Leftrightarrow$ Ο πίνακας $A - \lambda I_n$ δεν είναι αντιστρέψιμος

$\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$

$$[f - \lambda I_V]_{\alpha}^{\alpha} = [f]_{\alpha}^{\alpha} + [-\lambda I_V]_{\alpha}^{\alpha} = A - \lambda [I_V]_{\alpha}^{\alpha} = A - \lambda I_n$$

Ορισμός: Έστω $A \in K^{n \times n}$. Το πολυώνυμο $\det(A - x I_n)$ ονομάζεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A .

$$\det(A - x I_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - x \end{vmatrix}$$

λ ιδιοτιμή αν και μόνο αν λ ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του πίνακα $A = [f]_{\alpha}^{\alpha}$

$$\beta = \{\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_n\} \text{ βάση του } V \text{ και } B = [f]_{\beta}^{\beta}$$

Ερώτημα: Ποια είναι η σχέση μεταξύ του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του A και του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του B ;

Συμβολισμός: $\chi_A(x)$ συμβολίζεται το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A .

$$B = [f]_{\beta}^{\beta}, \quad A = [f]_{\alpha}^{\alpha}, \quad P = [I]_{\beta}^{\alpha}$$

$$[f]_{\beta}^{\beta} = [I]_{\alpha}^{\beta} [f]_{\alpha}^{\alpha} [I]_{\beta}^{\alpha}$$

$$B = P^{-1} A P$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} \chi_B(x) &= \det(B - x I_n) = \det(P^{-1} A P - x I_n) = \det(P^{-1} A P - P^{-1} I P) \\ &= \det(P^{-1} (A - x I_n) P) = \det(P^{-1}) \det(A - x I_n) \det P = \\ &= \underbrace{\det(P^{-1}) \det(P)}_{=1} \det(A - x I_n) = \det(A - x I_n) = \chi_A(x) \end{aligned}$$

Βόθριος με του A

Όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

Ορισμός: Έστω V και K -διανυσματικός χώρος $\alpha = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ βάση του V και $f: V \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση. Ονομάζεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο της απεικόνισης f (και το αβελιζάμε με $\chi_f(x)$) το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A = [f]_{\alpha}^{\alpha}$

$$\chi_f(x) = \chi_A(x) = \chi_B(x)$$

$$A = [f]_{\alpha}^{\alpha}$$

$$B = [f]_{\beta}^{\beta}$$

(5)

$$\blacktriangleright A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(x) = \det(A - xI_n) = \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-x \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n x^n + \text{μικρότερος όρος} \\ \text{πολυώνυμο βαθμού } n$$

Μια γραμμική απεικόνιση $f: V \rightarrow V$ έχει n πολύ $n = \dim V$ ιδιοτιμές.

$$\chi_A(x) = (-1)^n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

$$b_0 = \chi_A(0) = \det(A - 0I_n) = \det A$$

$$\chi_A(x) = (-1)^n x^n + (-x)^{n-1} (a_{11} + \dots + a_{22} + \dots + a_{nn})$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } b_{n-1} &= (-1)^{n-1} (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) \\ &= (-1)^{n-1} (\text{ίχνος του } A) \end{aligned}$$